Chuyên Đề:

SỬ DỤNG NGUYÊN LÍ DIRICHLET TIẾP CẬN CÁCH GIẢI MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC.

I. LỜI MỞ ĐẦU:

Trong quá trình đọc tài liệu về chứng minh bất đẳng thức, tôi tâm đắc với cách sử dụng nguyên lí Dirichlet và các bất đẳng thức đơn giản để giải quyết các bài toán bất đẳng thức khó vừa đơn giản, gọn nhẹ, dễ hiểu, thậm chí là học sinh giỏi mới bước vào lớp 10 cũng có thể hiểu được.

Với sự tìm tòi, học hỏi, tôi viết chuyên đề nhỏ này để góp phần bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi mong đây là chuyên đề có giá trị tham khảo cho đồng nghiệp và học sinh. Tôi xin chân thành cảm ơn sự đóng góp quý báu chân thành của quý thầy cô trong tổ Toán – Tin đã giúp tôi hoàn thành chuyên đề.

II. NỘI DUNG:

1. Cơ sở lí thuyết

1.1 Nguyên lí Dirichlet

Nguyên lí Dirichlet được phát biểu như sau: "Nếu nhốt vào n chuồng một số con thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chuồng mà trong đó có nhiều hơn một con thỏ." Từ nguyên lí Dirichlet, ta có mệnh đề.

1.2 Mệnh đề

Mệnh đề: Trong ba số thực bất kì x, y, z luôn tìm được hai số có tích không âm.

1.3 Nhận xét

Chúng ta sẽ sử dụng mệnh đề này trong việc chứng minh một số bất đẳng thức, bởi khi ta đã chọn được "điểm rơi" (tức là bất đẳng thức trở thành đẳng thức), chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = m$ thì ta có thể giả sử hai số $(a-m),(b-m)$ có tích $(a-m)(b-m) \geq 0;$ từ kết quả này để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

1.4 Bất đẳng thức AM – GM

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n \geq 0$

2. Ví dụ

2.1 Ví dụ 1.

Cho các số thực dương $a,b,c.$ Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Giải:

Dự đoán điểm rơi tại $a = b = c = 1$. Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$ thì ta có $2c(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2abc \geq 2bc + 2ca - 2c.$ Vậy chỉ cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2(ab + c).$ Mà $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2(ab + c) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$ Bất đẳng thức sau luôn đúng. Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.$

2.1.1 Nhận xét.

Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh được bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực $a,b,c.$

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Thật vậy, theo mệnh đề thì hai trong ba số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1$ có tích không âm. Giả sử $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$ thì ta có

$$c^2(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2 + c^2 \geq b^2c^2 + a^2c^2.$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + 2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (bc-1)^2 + (ca-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1.$

2.2 Ví dụ 2.

Cho các số thực dương $a,b,c.$ Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge (a+1)(b+1)(c+1).$$

Giải:

Sau khi nhân hai vế với 2 và biến đổi thì bất đẳng thức trên tương đương với $2(a^2+b^2+c^2)+2abc+4\ge 2(ab+bc+ca)+2(a+b+c).$

Theo ví dụ 1, ta chỉ cần chứng minh

$a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ge 0.$

Bất đẳng thức này luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

2.3 Ví dụ 3.

Cho các số thực dương $a,b,c.$ Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2.$$

Giải:

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+2abc+7\ge 9(ab+bc+ca).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì $2(a^2b^2+1)+2(b^2c^2+1)+2(c^2a^2+1)\ge 4(ab+bc+ca)$ và $3(a^2+b^2+c^2)\ge 3(ab+bc+ca).$

Kết hợp với kết quả ví dụ 1 $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca).$ Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

2.4 Ví dụ 4.

Cho các số thực bất kì $a,b,c.$ Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2.$$

Giải:

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+8\ge 6(ab+bc+ca).$$

Từ nhận xét ở ví dụ 1 $a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2(ab+bc+ca),$ ta chỉ cần chứng minh $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+6\ge 4(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (ab-1)^2+(bc-1)^2+(ac-1)^2\ge 0.$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\pm 1.$

2.4.1 Nhận xét.

Từ kết quả của ví dụ 4 cho ta bài toán sau trong đề thi Olimpic Châu Á Thái Bình Dương 2004: Cho các số thực dương $a,b,c.$ Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca).$$

2.5 Ví dụ 5. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1.$ Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca).\ \text{(Moskva 2000)}.$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a+b+c \ge \sqrt[3]{abc} = 3$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+a+b+c \ge a^2+b^2+c^2+3 = a^2+b^2+c^2+2abc+1 \quad (1)$$

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$ thì ta có

$$2c(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow 2abc \ge 2bc+2ca-2c \quad (2)$$

Mặt khác

$$a^2+b^2+c^2+1-2ab-2c = (a-b)^2+(c-1)^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+1 \ge 2ab+2c \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c \ge a^2+b^2+c^2+1+2abc$$
$$\ge 2bc+2ca-2c+2ab+2c = 2(ab+bc+ca).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

2.6 Ví dụ 6.

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4.$ Chứng minh rằng $ab+bc+ca-abc\le 2.$ (Đề thi chọn ĐTHSG Hoa Kì 2001).

Giải:

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0$ thì ta có

$$c(a-1)(b-1)\ge 0 \Leftrightarrow abc \ge bc+ca-c$$

Nên $ab+bc+ca-abc \le ab+c \quad (1)$

Mà $4 = a^2+b^2+c^2+abc \ge 2ab+c^2+abc$

$$\Rightarrow 4-c^2 \ge ab(c+2) \Rightarrow 2-c \ge ab \Rightarrow ab+c \le 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

2.6.1 Nhận xét.

Tương tự ta có thể giải quyết được bài toán sau:

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4.$ Chứng minh rằng $a+b+c\le 3.$ (HSG Iran 2002).

Giải:

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0 \Rightarrow a+b-1\le ab$ (1)

Mặt khác, theo ví dụ 6, ta có $c \le 2-ab$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a+b+c-1 \le 2-ab+ab \Leftrightarrow a+b+c\le 3.$ Đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

2.7 Ví dụ 7.

Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\ge 1.$$

Giải:

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1)\ge 0.$ Khi đó

$$(b^2-b+1)(c^2-c+1)=bc(b-1)(c-1)+b^2+c^2-b-c+1$$
$$\ge b^2+c^2-b-c+1\ge \frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1>0.$$

Do đó

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\ge (a^2-a+1)\left(\frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1\right)$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-a+1)(a^2-4a+5).$$

Nên chỉ cần chứng minh $(a^2-a+1)(a^2-4a+5)\ge 2.$

Xét hàm số $f(a)=(a^2-a+1)(a^2-4a+5), 0<a<3.$

$f'(a)=(2a-1)(a^2-4a+5)+(a^2-a+1)(2a-4)=4a^3-15a^2+20a-9=(a-1)(4a^2-11a+9)$

$f'(a)=0\Leftrightarrow a=1.$

$f(1)=2.$

Hàm số $f(a)$ nghịch biến trên $(0;1)$ và đồng biến trên $(1;3)$ nên $\underset{(0;3)}{Min} f(a)=f(1)=2.$

Từ đó ta có $(a^2-a+1)(a^2-4a+5)\ge 2,$ điều phải chứng minh.

2.7.1 Nhận xét.

Bất đẳng thức trên có thể mở rộng ra cho nhiều biến.

- Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=r\ge 1.$ Chứng minh rằng nếu $n\le 13$ thì $(x_1^2-x_1+1)(x_2^2-x_2+1)...(x_n^2-x_n+1)\ge (r^n-r+1)^2.$
- Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng $(a^p-a+1)(b^p-b+1)(c^p-c+1)\ge 1, \forall p>1.$

2.8 Ví dụ 8.

Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1.$ Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge \frac{2}{1+a+b+c}+1 \quad (1)$$
$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{1+a+b+c}\ge 1 \quad (2)$$

Giải:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c}\ge \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM và $abc=1$ thì $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$ Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1,b-1,c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1)\ge 0\Rightarrow \frac{c+1}{c}=ab+1\ge a+b.$

Ta có

$$\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2} \ge \frac{2}{1+ab+a+b}$$
$$\ge \frac{2}{1+ab+ab+1}=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}.$$

Do đó $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{1+a+b+c} \ge \frac{c}{c+1}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{\frac{1+c}{c}+1+c}=1.$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh.

2.9 Ví dụ 9.

Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2} \ge 3. \text{ (UK TST 2005).}$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2} \ge 3.$$

Theo (1) và (2) ở ví dụ 8 ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}$$
$$\ge \frac{2}{(a+1)^2}+\frac{2}{(b+1)^2}+\frac{2}{(c+1)^2}+\frac{2}{a+b+c+1}+1 \ge 2+1=3.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2.10 Ví dụ 10.

Cho các số thực không âm bất kì a,b,c. Chứng minh rằng

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right) \ge a+b+c.$$

Giải:

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $a-1, b-1, c-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow ab \ge a+b-1$. Nên ta chỉ cần chứng minh $c(a+b-1)+2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right) \ge a+b+c$ hay

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right) \ge (a+b-2)(1-c).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \ge \frac{(a+b-2)^2}{2}+(c-1)^2$$
$$\ge \sqrt{2}\left|(a+b-2)(1-c)\right| \ge \sqrt{2}(a+b-2)(1-c).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2.10.1 Nhận xét bài toán trên là một trường hợp riêng của đề tập huấn cho đội tuyển HSG Việt Nam dự thi IMO 2009: Tìm hằng số k nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng mọi số thực không âm bất kì a,b,c:

$$abc+2+k\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)\geq a+b+c.$$

Ở bất đẳng thức trên nếu cho $k=2$ ta thu được bất đẳng thức

$$abc+2\left(a^2+b^2+c^2\right)+8\geq 5(a+b+c).\text{(HELLO IMO 2007).}$$

2.11 Ví dụ 11.

Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2(a+b+c).$(biến thể của đề thi HSGQG 2006)

Giải:

Đặt $\frac{1}{a}=x;\ \frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z.$

Ta có $xyz=\frac{1}{abc}=1.$ Quy về chứng minh

$x^2+y^2+z^2+3\geq 2(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2xyz+1\geq 2(xy+yz+zx).$

Theo mệnh đề thì hai trong ba số $x-1,y-1,z-1$ có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử

$(x-1)(y-1)\geq 0\Leftrightarrow 2z(x-1)(y-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2xyz\geq 2xz+2yz-2z.$

Vậy cần chứng minh:

$x^2+y^2+z^2+1\geq 2(yz+z)$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(z-1)^2\geq 0.$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1.$

2.12 Ví dụ 12.

Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2.$$

Giải:

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1,b-1,c-1$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(b-1)(c-1)\geq 0\Rightarrow b+c\leq 1+bc.$

Khi đó

$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc\leq (b+c)^2-2(b+c-1)=(3-a)^2-2(2-a)=a^2-4a+5.$

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2}{bc}\geq\frac{8}{(b+c)^2}=\frac{8}{(3-a)^2}.$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$\frac{1}{a^2}+\frac{8}{(3-a)^2}\geq 2a^2-4a+5\Leftrightarrow\frac{9a^2-6a+9}{a^2(3-a)^2}\geq 2a^2-4a+5$

$\Leftrightarrow\frac{9a^2-6a+9}{a^2(3-a)^2}-3\geq 2(a-1)^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{(a-1)^2(9+12a-3a^2)}{a^2(3-a)^2} \geq 2(a-1)^2.$

Lại sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$a(3-a) \leq \dfrac{1}{4}(a+3-a)^2 = \dfrac{9}{4}.$

Do đó $\dfrac{9+12a-3a^2}{a^2(3-a)^2} - 2 \geq \dfrac{4(3+4a-a^2)}{3a(3-a)} - 2 = \dfrac{2a^2-2a+12}{3a(3-a)} > 0.$

Phép chứng minh hoàn tất, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

2.13 Ví dụ 13.

Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng:

$$(a+b+ab)(b+c+bc)(c+a+ca) \geq 27abc.$$

Giải:

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $bc-a, ca-b, ab-c$ luôn tồn tại hai số có tích không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $(ca-b)(ab-c) \geq 0.$ Khi đó

$(a+b+ab)(c+a+ca) = (3+ab-c)(3+ac-b)$

$= (3-b-c+ab+ca) + (ab-c)(ca-b) \geq 3(3-b-c+ab+ca) = 3(a+ab+ca).$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $(a+ab+ca)(b+c+bc) \geq 9abc.$

Theo bất đẳng thức Bunyakovsky

$(a+ab+ca)(bc+c+b) \geq \left(\sqrt{abc}+\sqrt{abc}+\sqrt{abc}\right)^2 = 9abc.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

3. Bài tập tham khảo

3.1 Bài 1.

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4.$ Chứng minh rằng $a+b+c \geq ab+bc+ca.$ (HSGQG 1996)

3.2 Bài 2.

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $4abc=a+b+c+1.$ Chứng minh rằng $a+b+c \leq ab+bc+ca.$

3.3 Bài 3.

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1.$ Chứng minh rằng

$\sqrt{9+16a^2}+\sqrt{9+16b^2}+\sqrt{9+16c^2} \geq 3+4(a+b+c).$

3.4 Bài 4.

Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n} = r \geq 1.$ Chứng minh rằng nếu $n \leq 13$ thì $(x_1^2-x_1+1)(x_2^2-x_2+1)...(x_n^2-x_n+1) \geq (r^n-r+1)^2.$

3.5 Bài 5.

Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng

$$(a^p-a+1)(b^p-b+1)(c^p-c+1) \geq 1, \forall p>1.$$

Qua các ví dụ trên, chúng ta thấy được phần nào ứng dụng đơn giản nhưng thú vị của nguyên lí Dirichlet trong chứng minh bất đẳng thức. Sự kết hợp nguyên lí Dirichlet và các BĐT cổ điển cho chúng ta lời giải ngắn gọn và đơn giản.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Huỳnh Tấn Châu, Nguyễn Đình Thi, Sử dụng nguyên lí Dirichlet trong chứng minh bất đẳng thức, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 413.
2. Trần Phương (2012), Những viên kim cương trong bất đẳng thức.